TITLE:

TASOEV 型連分数の有理近似(解析的整数論とその周辺)

AUTHOR(S):
小松, 尚夫

CITATION:
小松, 尚夫. TASOEV 型連分数の有理近似(解析的整数論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2006, 1511: 166-172

ISSUE DATE:
2006-08

URL:
http://hdl.handle.net/2433/58598

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1511 巻 2006 年 166-172

TASOEV型連分数の有理近似

弘前大学・理工学部　小松　尚夫　(TAKAO KOMATSU)
FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
HIROSAKI UNIVERSITY

1. 序論

Hurwitz連分数は

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, \overline{Q_1(k), \ldots, Q_p(k)}]_{k=1}^{\infty}$$
$$= [a_0; a_1, \ldots, a_n, Q_1(1), \ldots, Q_p(1), Q_1(2), \ldots, Q_p(2), Q_1(3), \ldots]$$

という形をしている擬似周期的単純連分数である. ここで a_0 は整数, a_1, ..., a_n は正整数, Q_1, ..., Q_p は有理係数多項式で, $k = 1, 2, \ldots$ に対して正整数値を取り, 少なくとも一つは定数ではない.

Tasoev連分数 ([8], [10]) も擬似周期的ではあるが, $Q_j(k)$ が多項式ではなく k の指数である点で異なる. 筆者は[2]で, Tasoevが提唱したが間違いを含んでいた $[0; \overline{\underbrace{a^k, \ldots, a^k}_{m}}]_{k=1}^{\infty}$ という連分数の閉じた形を正しく求め, また[3]においてある種の拡張形を見い出した. すなわち,

$$[0; \overline{ua^k}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^{n} (a^{2i}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^{n} (a^{2i}-1)^{-1}},$$

$$[0; ua-1, \overline{1, ua^{k+1}-2}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-2n-1} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^{n} (a^{2i}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-2n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^{n} (a^{2i}-1)^{-1}},$$

$$[0; \overline{ua^k, va^k}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^{n} (a^{i}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^{n} (a^{i}-1)^{-1}},$$

$$[0; ua-1, 1, va-2, \overline{1, ua^{k+1}-2, 1, va^{k+1}-2}]_{k=1}^{\infty}$$
$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)(n+2)/2} \prod_{i=1}^{n} (a^{i}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n(n+1)/2} \prod_{i=1}^{n} (a^{i}-1)^{-1}}$$

などを得た.

[4] では, ある種の周期3のTasoev 連分数が得られた. すなわち,

$$[0; \overline{ua^{2k-1}-1, 1, va^{2k}-1}]_{k=1}^{\infty} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-n} a^{-(n+1)^2} \prod_{i=1}^{n} (a^{2i}-(-1)^i)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{-n} v^{-n} a^{-n^2} \prod_{i=1}^{n} (a^{2i}-(-1)^i)^{-1}},$$

本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金　基盤研究(C)(2) 15540021の補助を受けた.

$$[0;\overline{ua^k-1,1,va^k-1}]_{k=1}^{\infty}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}u^{-n-1}v^{-n}a^{-(n+1)(n+2)/2}\prod_{i=1}^{n}(a^i-(-1)^i)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^{-n}v^{-n}a^{-n(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n}(a^i-(-1)^i)^{-1}}$$

などである.

[5] では, 別の種類の周期3のTasoev連分数が得られた. すなわち,

$$[0;\overline{ua^k-1,1,v-1}]_{k=1}^{\infty}$$
$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}u^{-2n-1}v^{-2n}a^{-(n+1)^2}\prod_{i=1}^{n}(a^{2i}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}\left((uv)^{-2n}a^{-n^2}-(uv)^{-2n-1}a^{-(n+1)^2}\right)\prod_{i=1}^{n}(a^{2i}-1)^{-1}},$$

$$[0;\overline{v-1,1,ua^k-1}]_{k=1}^{\infty}$$
$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left(u^{-2n}v^{-2n-1}a^{-n^2}+u^{-2n-1}v^{-2n-2}a^{-(n+1)^2}\right)\prod_{i=1}^{n}(a^{2i}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}(uv)^{-2n}a^{-n^2}\prod_{i=1}^{n}(a^{2i}-1)^{-1}}$$

などである. これらはeのタイプのHurwitz連分数に対応するものと考えられる.

様々なHurwitz連分数の有理近似が多くの著者によって考えられてきた. より一般のHurwitz連分数に対する結果として, Tasoev [10]は特に次の結果を得た. $\alpha=[a_0;a_1,\dots,a_s,\overline{c_1+kd_1,\dots,c_m+kd_m}]_{k=1}^{\infty}$とする, ここで$a_0$は整数で, それ以外の部分商はみな正整数値をとるものとする. $\Omega(>0)$を0でないd_iの個数とし, $d=\max_{1\le i\le m}d_i$とおく. このとき, $C=\Omega/d$と任意の $\epsilon>0$に対して

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<(C+\epsilon)\frac{\log\log q}{q^2\log q}$$

が無限個のp, qについて成り立ち, 一方すべての整数p, $q(\ge q_0)$について

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>(C-\epsilon)\frac{\log\log q}{q^2\log q}$$

であるような正定数q_0が存在する.

Tasoevは指数の場合の結果も与えている. 整数a_0, $a>1$, $m>1$に対して $\alpha=[a_0;\underbrace{\overline{a^k,\dots,a^k}}_{m}]_{k=1}^{\infty}$とおく. すると$C=1/\sqrt{a}$と任意の $\epsilon>0$に対して

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<(C+\epsilon)q^{-2-\sqrt{2\log a/(m\log q)}}$$

が無限個のp, qについて成り立ち,一方すべての整数p, $q(\ge q_0)$について

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>(C-\epsilon)q^{-2-\sqrt{2\log a/(m\log q)}}$$

であるようなa, m, ϵに依存する正定数q_0が存在する. 似たような結果は[9]にも見られるが, 残念ながら誤りも多く, 重要な結果とは思えない.

[4]で見られるように, Tasoev連分数のうちのあるタイプのものは Rogers-Ramanujan連分数のうちのあるタイプのものと一致する. この観点から, Rogers-Ramanujan連分数の有理近似を考えてみることは有益であるが, 知られている結果は極めて少ない. 塩川[7]の有理近似の結果は希少価値がある. $f(\alpha,x)$を $f(\alpha,x)=1+\frac{\alpha x}{1}+\frac{\alpha x^2}{1}+\frac{\alpha x^3}{1}+\cdots$ によって定義されるRogers-Ramanujan連分数とする. $a(\geq 2)$, b, d を$\gcd(b,d)=1$である正整数とし, dはaを割り切るものとする. また, $(d/b)^2>a$のとき$C=\sqrt{b/d}$, それ以外のとき$C=\sqrt{d/(ab)}$とおく. このとき, 任意の $\epsilon>0$に対して

$$\left|f\left(\frac{d}{b},\frac{1}{a}\right)-\frac{p}{q}\right|<(C+\epsilon)q^{-2-\sqrt{\log a/\log q}}$$

が無限個のp, qについて成り立ち, 一方すべての整数p, $q(\geq q_0)$について

$$\left|f\left(\frac{d}{b},\frac{1}{a}\right)-\frac{p}{q}\right|>(C-\epsilon)q^{-2-\sqrt{\log a/\log q}}$$

であるような正整数$q_0=q_0(a,b,d,\epsilon)$が存在する. $f(d/b,1/a)=[1;\overline{ba^k/d,a^k}]_{k=1}^{\infty}$ となって, このRogers-Ramanujan連分数はTasoev型の連分数に一致することに注意する.

この原稿では

$$\alpha=[b_0;b_1,\ldots,b_s,\overline{u_1a_1^k+v_1,\ldots,u_ma_m^k+v_m}]_{k=1}^{\infty}$$

というタイプの一般的なTasoev型の連分数の有理近似を与える. ここで, b_0は整数, b_1, ..., b_sは正整数, $u_ja_j^k+v_j$ $(j=1,2,\ldots,m)$は$k=1,2,\ldots$ に対して正整数値を取り, u_jのうち少なくとも一つは0でない.

2. 主結果

上述の実数αは一般的な形をしてはいるが, 非循環部を取り除き, $u_j=0$となる部分をまとめて

$$\alpha=[0;\overline{u_1a_1^k+v_1,\ldots,u_ra_r^k+v_r,v_{r+1},\ldots,v_{r+l}}]_{k=1}^{\infty}$$

という場合を考えれば十分である. ここで $u_j>0$ $(1\leq j\leq r)$ で $r+l=m$である.

定理 1. $A=a_1\ldots a_r$, $U=\prod_{j=1}^r u_j$, $V=\prod_{\nu=1}^l v_{r+\nu}$とおく. このとき任意の $\epsilon>0$に対して,

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<(1+\epsilon)q^{-2-C^*}$$

が無限個の整数p, qについて成り立ち, 一方すべての整数p, $q(\geq q_0)$について

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>(1-\epsilon)q^{-2-C^*}$$

であるようなa_j, u_j $(1\leq j\leq r)$, v_j $(1\leq j\leq m)$, ϵに依存する正定数q_0が存在する, ここで

$$C^*=\max_{1\leq j\leq r}\left(\left(\log(u_j\sqrt{a_j})-\frac{\log a_j\log(a_1\ldots a_{j-1}UV)}{\log A}\right)\frac{1}{\log q}+\frac{\sqrt{2}\log a_j}{\sqrt{\log A\cdot\log q}}\right).$$

注. (1) もし$r=m$, $u_j=1$, $a_j=a$, $v_j=0$ $(1\le j\le m)$ならば, 定理 1 は上記のTasoevの近似の結果と一致する.

(2) もし$r=m=2$, $u_1=b/d$, $a_1=a_2=a$, $v_1=v_2=0$ならば, 定理 1 は上記の 塩川の近似の結果と一致する.

定理 1は一見するとかなり複雑な形をしているが, 今までに知られているTasoev連分数に応用してみると割とすっきりした結果に落ち着く. 例として幾つか挙げよう.

例 1.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1}v^{-n}a^{-(n+1)^2}\prod_{i=1}^{n}(a^{2i}-(-1)^i)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^{-n}v^{-n}a^{-n^2}\prod_{i=1}^{n}(a^{2i}-(-1)^i)^{-1}}\\ &= [0;\overline{ua^{2k-1}-1,1,va^{2k}-1}]_{k=1}^{\infty}\end{aligned}$$

というTasoev連分数を考える. 定理 1で$r=2$, $l=1$, $a_1=a_2=a^2$, $u_1=u/a$, $u_2=v$, $v_1=v_2=-1$, $v_3=1$とおく. また

$$C=\begin{cases}\sqrt{v/(ua)} & (u\ge vのとき)\\ \sqrt{u/(va)} & (u<vのとき)\end{cases}$$

とする. このとき, 任意の $\epsilon>0$に対して

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<(C+\epsilon)q^{-2-\sqrt{2\log a/\log q}}$$

が無限個の整数p, qについて成り立ち, 一方すべての整数p, $q(\ge q_0)$について

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>(C-\epsilon)q^{-2-\sqrt{2\log a/\log q}}$$

であるような正定数$q_0=q_0(a,u,v,\epsilon)$が存在する.

例 2.

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-2n-1}v^{-2n}a^{-(n+1)^2}\prod_{i=1}^{n}(a^{2i}-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty}\left((uv)^{-2n}a^{-n^2}-(uv)^{-2n-1}a^{-(n+1)^2}\right)\prod_{i=1}^{n}(a^{2i}-1)^{-1}}\\ &= [0;\overline{ua^k-1,1,v-1}]_{k=1}^{\infty}\end{aligned}$$

というTasoev連分数を考える. 定理 1 で$r=1$, $l=2$, $a_1=a$, $u_1=u$, $v_1=-1$, $v_2=1$, $v_3=v-1$とおく. このとき, 任意の $\epsilon>0$に対して

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right|<\left(\frac{v-1}{\sqrt{a}}+\epsilon\right)q^{-2-\sqrt{2\log a/\log q}}$$

が無限個の整数 p, qについて成り立ち, 一方すべての整数p, $q(\ge q_0)$について

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right|>\left(\frac{v-1}{\sqrt{a}}-\epsilon\right)q^{-2-\sqrt{2\log a/\log q}}$$

であるような正定数$q_0=q_0(a,u,v,\epsilon)$が存在する.

例 3.

$$\begin{aligned}\gamma &= [0;\overline{ua^k, va^k}]_{k=1}^{\infty}\\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n-1}v^{-n}a^{-(n+1)(n+2)/2}\prod_{i=1}^{n}(a^i-1)^{-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} u^{-n}v^{-n}a^{-n(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n}(a^i-1)^{-1}}\end{aligned}$$

というTasoev連分数を考える. 定理 1で$r=2$, $l=0$, $a_1=a_2=a$, $u_1=u$, $u_2=v$とおく. また

$$C=\begin{cases}\sqrt{v/(ua)} & (v/u \le \sqrt{a}\ のとき)\\ \sqrt{u/v} & (v/u > \sqrt{a}\ のとき)\end{cases}$$

とする. このとき, 任意の $\epsilon>0$に対して

$$\left|\gamma-\frac{p}{q}\right| < (C+\epsilon)q^{-2-\sqrt{\log a/\log q}}$$

が無限個の整数p, qについて成り立ち, 一方すべての整数p, $q(\ge q_0)$について

$$\left|\gamma-\frac{p}{q}\right| > (C-\epsilon)q^{-2-\sqrt{\log a/\log q}}$$

であるような正定数$q_0=q_0(a,u,v,\epsilon)$が存在する.

γ の代わりに, $[0;ua-1,1,va-2,\overline{1,ua^{k+1}-2,1,va^{k+1}-2}]_{k=1}^{\infty}$ や $[0;\overline{ua^k-1,1,va^k-1}]_{k=1}^{\infty}$ などのTasoev型連分数を考えても, これと同じ結果となる.

3. 定理 1の証明

定理の証明には次が必要である.

補題 1. $[a_0;a_1,a_2,\ldots]$ **をある連分数, その近似分数を** $p_n/q_n=[a_0;a_1,\ldots,a_n]$ $(n=0,1,\ldots)$**とする. もし**$\sum_{n=1}^{\infty}(a_na_{n+1})^{-1}<\infty$**ならば,** $q_n/(a_1a_2\cdots a_n)$**は**$n\to\infty$**で, ある有限な0でない極限に収束する.**

証明 ([6], Lemma 1). 定義により

$$q_1=a_1,\quad q_2=a_1a_2\left(1+\frac{1}{a_1a_2}\right),$$

$$\begin{aligned}q_3&=a_1a_2a_3\left(1+\frac{1}{a_1a_2}\right)\left(1+\frac{1}{a_2a_3}\left(1+\frac{1}{a_1a_2}\right)^{-1}\right)\\ &=a_1a_2a_3\left(1+\frac{1}{a_1a_2}\right)\left(1+\frac{t_2}{a_2a_3}\right)\end{aligned}$$

が$1/2\le t_2<1$であるt_2について成り立つ. 同様に

$$q_n=a_1a_2\cdots a_n\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\frac{t_j}{a_ja_{j+1}}\right)$$

が$1/2 < t_j < 1$であるt_j $(3 \le j \le n-1)$について成り立つ. よって, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n a_{n+1})^{-1} < \infty$ ならば, $q_n/(a_1 a_2 \cdots a_n)$は$n \to \infty$で, ある有限な0でない極限に収束する.

定理1の証明. $n = (k-1)m$のとき, $a_{n+1} = u_1 a_1^k + v_1$ かつ

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{r} (u_j a_j^i + v_j) \cdot \prod_{\nu=1}^{l} v_{r+\nu}^{k-1}$$

を得る. 補題1より

$$\begin{aligned}\log q_n &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{r} \log(u_j a_j^i + v_j) + \sum_{\nu=1}^{l} \log v_{r+\nu}^{k-1} + O(1) \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \log A + (k-1) \log(UV) + O(1) \\ &= \left(k - \frac{1}{2} + \frac{\log(UV)}{\log A}\right)^2 \frac{\log A}{2} + O(1)\end{aligned}$$

であるから,

$$k \sim \frac{1}{2} - \frac{\log(UV)}{\log A} + \sqrt{\frac{2\log q_n}{\log A}}$$

となる. よく知られているように,

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

である, ここで$\alpha_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots]$. 従って,

$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| &\sim \frac{1}{u_1 q_n^{k \log a_1/\log q_n} q_n^2} \\ &\sim q_n^{-2-\left(\log(u_1\sqrt{a_1}) - \frac{\log a_1 \log(UV)}{\log A}\right)\frac{1}{\log q_n} + \frac{\sqrt{2}\log a_1}{\sqrt{\log A \cdot \log q_n}}}\end{aligned}$$

を得る. $n = (k-1)m + 1$のとき, $a_{n+1} = u_2 a_2^k + v_2$ かつ

$$a_1 a_2 \cdots a_n = (u_1 a_1^k + v_1) \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{r} (u_j a_j^i + v_j) \cdot \prod_{\nu=1}^{l} v_{r+\nu}^{k-1}$$

を得る. よって,

$$\begin{aligned}\log q_n &= \log(u_1 a_1^k + v_1) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{r} \log(u_j a_j^i + v_j) + \sum_{\nu=1}^{l} \log v_{r+\nu}^{k-1} + O(1) \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \log A + (k-1)\log(UV) + k \log a_1 + \log u_1 + O(1) \\ &= \left(k - \frac{1}{2} + \frac{\log(a_1 UV)}{\log A}\right)^2 \frac{\log A}{2} + O(1)\end{aligned}$$

であるから，

$$k \sim \frac{1}{2} - \frac{\log(a_1 UV)}{\log A} + \sqrt{\frac{2\log q_n}{\log A}}$$

が得られる．従って，

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \sim \frac{1}{u_2 q_n^{k\log a_2/\log q_n} q_n^2}$$
$$\sim q_n^{-2-\left(\log(u_2\sqrt{a_2}) - \frac{\log a_2 \log(a_1 UV)}{\log A}\right)\frac{1}{\log q_n} + \frac{\sqrt{2}\log a_2}{\sqrt{\log A \cdot \log q_n}}}$$

を得る．同様に，$n = (k-1)m + (j-1)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$のとき，

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \sim q_n^{-2-\left(\log(u_j\sqrt{a_j}) - \frac{\log a_j \log(a_1 \ldots a_{j-1} UV)}{\log A}\right)\frac{1}{\log q_n} + \frac{\sqrt{2}\log a_j}{\sqrt{\log A \cdot \log q_n}}}$$

を得る．他方，$n = (k-1)m + (r - 1 + \nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, l)$のとき，

$$\frac{1}{(v_{r+\nu} + 2)q_n^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{v_{r+\nu} q_n^2}$$

を得る．

References

[1] W. B. Jones and W. J. Thron, *Continued Fractions: Analytic theory and applications*, (Encyclopedia of mathematics and its applications; vol. 11), Addison-Wesley, Reading, 1980.

[2] T. Komatsu, *On Tasoev's continued fractions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **134** (2003), 1-12.

[3] T. Komatsu, *On Hurwitzian and Tasoev's continued fractions*, Acta Arith. **107** (2003), 161-177.

[4] T. Komatsu, *Tasoev's continued fractions and Rogers-Ramanujan continued fractions*, J. Number Theory **109** (2004), 27-40.

[5] T. Komatsu, *Hurwitz and Tasoev continued fractions*, Monatsh. Math. (2004), DOI 10.1007/s00605-004-0281-0 (online).

[6] I. Shiokawa, *Rational approximations to the values of certain hypergeometric functions*, Number Theory and Combinatorics, Japan 1984 (J. Akiyama et. al., eds.), World Sci. Publ. Co., Singapore, 1985, pp. 353–367.

[7] I. Shiokawa, *Rational approximations to the Rogers-Ramanujan continued fraction*, Acta Arith. **50** (1988), 23–30.

[8] B. G. Tasoev, *Certain problems in the theory of continued fractions*, Trudy Tbiliss. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **16/17** (1984), 53–83. (Russian)

[9] B. G. Tasoev, *Rational approximations to some infinite continued fractions*, Trudy Tbiliss. Univ. Mat. Mekh. Astronom. **24** (1988), 104–138. (Russian)

[10] B. G. Tasoev, *Rational approximations to certain numbers*, Mat. Zametki **67** (2000), 931–937; English transl. in Math. Notes **67** (2000), 786–791.

Takao Komatsu
Faculty of Science and Technology
Hirosaki University
Hirosaki, 036-8561
Japan
komatsu@cc.hirosaki-u.ac.jp